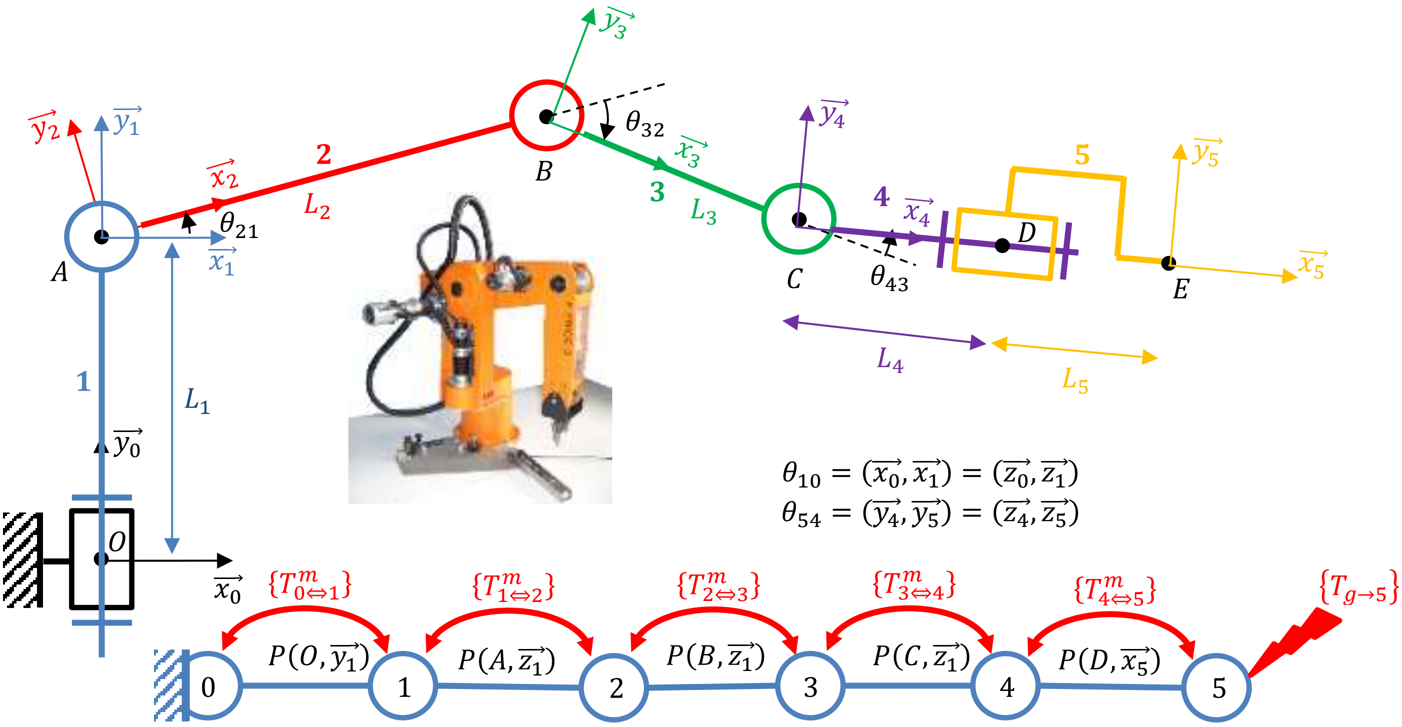
PFS

Exercice 1: Chaîne ouverte – Robot ERICC3



Question 1: Donner les torseurs $\{T_{ji}^m\}$ des actions des moteurs sur chaque pièce

01	12	23	34	45
$\{T_{01}^m\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}_0}$	$\{T_{12}^m\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{12} \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{23}^m\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{23} \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{34}^m\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{34} \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{45}^{m5}\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & C_{45} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}_4}$

Question 2: Donner les torseurs $\{T_{ji}\}$ des actions dans toutes les liaisons

01	12	23	34	45
$\{T_{01}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{12}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{23}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{34}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{45}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{45} & 0 \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}_E^{\mathfrak{B}_4}$

Remarques :

- Attention à ne pas écrire $\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (O,\overrightarrow{y_1})}^{\mathfrak{B}_0}$ car selon le point choisi, les valeurs de L et M peuvent changer…

Le choix de la base n'est pour le moment pas fixé, le point P non plus, on verra en question 6 qu'il est judicieux de les définir dans $\mathfrak{B}_1$ et pour le torseur $\{T_{01}\}$ le point O

Question 3: Donner le torseur $\{T_{g\to 5}\}$ de la pesanteur sur la pièce 5 dans $\mathfrak{B}_1$

$$\{T_{g\to 5}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_1}$$
$$\forall P \in (E,\overrightarrow{y_1})$$

Question 4: Faire le bilan du nombre d'équations et d'inconnues du problème afin de vérifier qu'il est solvable (isostatique)

$$I_s = 5+5+5+5+5 = 25$$
$$E_s = 6(P-1) = 6*(6-1) = 6*5 = 30$$
$$h = m + I_s - E_s = 5 + 25 - 30 = 0$$

Question 5: En isolant un système de solides bien choisi, déterminer les actions dans la base $\mathfrak{B}_1$ dans la liaison pivot entre les solides 1 et 0 en O

Isolons l'ensemble des solides $\{1+2+3+4+5\}$

Il est soumis à 3 actions extérieures : $\{T_{g\to 5}\}$, $\{T_{01}\}$ et $\{T_{01}^m\}$

Appliquons le PFS à ce système dans le référentiel terrestre supposé Galiléen :

$$\{T_{g\to 5}\} + \{T_{01}\} + \{T_{01}^m\} = \{0\}$$
$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_E^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$$

Attention : bien que l'on puisse définir le torseur $\{T_{01}\}$ soit en O, soit en A, le choix induit des valeurs différentes dans les valeurs des moments

Déplaçons le seul torseur qui n'est pas en O en O

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{M_E} + \overrightarrow{OE} \wedge \vec{R}$$
$$= (L_1\overrightarrow{y_1} + L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3} + (L_4 + L_5)\overrightarrow{x_4}) \wedge (-mg\overrightarrow{y_1})$$
$$= -mg(L_2\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{y_1} + L_3\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{y_1} + (L_4 + L_5)\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{y_1})$$
$$\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{y_1} = (\cos\theta_{21}\,\overrightarrow{x_1} + \sin\theta_{21}\,\overrightarrow{y_1}) \wedge \overrightarrow{y_1} = \cos\theta_{21}\,\overrightarrow{z_1}$$
$$= -mg(L_2\cos\theta_{21}\,\overrightarrow{z_1} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21})\,\overrightarrow{z_1} + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})\,\overrightarrow{z_1})$$
$$= -mg[L_2\cos\theta_{21} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})]\overrightarrow{z_1}$$

$$\{T_{g\to5}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_E^{\mathfrak{B}_1}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & -mg[L_2\cos\theta_{21} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$$

$$= \begin{Bmatrix} -mg\overrightarrow{y_1} \\ -mg[L_2\cos\theta_{21} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})]\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_O$$

On a donc :

$$\begin{Bmatrix} -mg\overrightarrow{y_1} \\ -mg[L_2\cos\theta_{21} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})]\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_O$$
$$+ \begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_1} + Y_{01}\overrightarrow{y_1} + Z_{01}\overrightarrow{z_1} \\ L_{01}\overrightarrow{x_1} + N_{01}\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{01}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

On obtient donc les deux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} -mg\overrightarrow{y_1} + X_{01}\overrightarrow{x_1} + Y_{01}\overrightarrow{y_1} + Z_{01}\overrightarrow{z_1} + \vec{0} = \vec{0} \\ -mg[L_2\cos\theta_{21} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})]\overrightarrow{z_1} + L_{01}\overrightarrow{x_1} + N_{01}\overrightarrow{z_1} + C_{01}\overrightarrow{y_1} = \vec{0} \end{cases}$$

On projette dans la base $\mathfrak{B}_1$

$$\begin{cases} X_{01} = 0 \\ -mg + Y_{01} = 0 \\ Z_{01} = 0 \\ L_{01} = 0 \\ C_{01} = 0 \\ -mg[L_2\cos\theta_{21} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] + N_{01} = 0 \end{cases}$$

Résolution :

$$\begin{cases} X_{01} = 0 \\ Y_{01} = mg \\ Z_{01} = 0 \\ L_{01} = 0 \\ C_{01} = 0 \\ N_{01} = mg[L_2\cos\theta_{21} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] \end{cases}$$

$$\{T_{01}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ mg & 0 \\ 0 & mg[L_2\cos\theta_{21} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$$

Au passage :

$$\{T_{01}^m\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$$

Question 6: En isolant plusieurs systèmes bien choisis et en choisissant la bonne projection du bon théorème, déterminer le couple C_{ij} que doivent exercer chaque moteurs afin de maintenir le robot en équilibre

Isolons la pièce 5 et utilisons l'équation suivant $\overrightarrow{x_4}$ du TMS en D dans R_g: $$\{T_{g\rightarrow 5}\} + \{T_{45}\} + \{T_{45}^m\} = \{0\}$$ On obtient : $$0 + 0 + C_{45} = 0$$ $$C_{45} = 0$$
Isolons l'ensemble $(4 + 5)$ et utilisons l'équation suivant $\overrightarrow{y_1}$ du TMS en C dans R_g : $$\{T_{g\rightarrow 5}\} + \{T_{34}\} + \{T_{34}^m\} = \{0\}$$ On obtient : $$-mg[(L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] + 0 + C_{34} = 0$$ $$C_{34} = mg[(L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})]$$
Isolons l'ensemble $(3 + 4 + 5)$ et utilisons l'équation suivant $\overrightarrow{y_1}$ du TMS en B dans R_g : $$\{T_{g\rightarrow 5}\} + \{T_{23}\} + \{T_{23}^m\} = \{0\}$$ On obtient : $$-mg[L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] + 0 + C_{23} = 0$$ $$C_{23} = mg[L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})]$$
Isolons l'ensemble $(2 + 3 + 4 + 5)$ et utilisons l'équation suivant $\overrightarrow{y_1}$ du TMS en A dans R_g : $$\{T_{g\rightarrow 5}\} + \{T_{12}\} + \{T_{12}^m\} = \{0\}$$ On obtient : $$-mg[L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] + 0 + C_{12} = 0$$ $$C_{12} = mg[L_2\cos\theta_{12} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})]$$
On a vu précédemment que : $$C_{01} = 0$$

Bilan :

$$\begin{cases} C_{01} = 0 \\ C_{12} = mg[L_2\cos\theta_{12} + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] \\ C_{23} = mg[L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] \\ C_{34} = mg[(L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21})] \\ C_{45} = 0 \end{cases}$$

Question 7: Déterminer la position du mécanisme dans laquelle ces couples sont les plus grands et donner leurs expressions

Lorsque toutes les pièces sont à l'horizontale, on a :

$$\theta_{21} = \theta_{32} + \theta_{21} = \theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21} = 0$$

Soit :

$$\theta_{21} = \theta_{32} = \theta_{43} = 0$$

$$\begin{cases} C_{01} = 0 \\ C_{12} = mg[L_2 + L_3 + (L_4 + L_5)] \\ C_{23} = mg[L_3 + (L_4 + L_5)] \\ C_{34} = mg(L_4 + L_5) \\ C_{45} = 0 \end{cases}$$